© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/.

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Medio
Prueba 2

31 de octubre de 2023

Zona A tarde | **Zona B** tarde | **Zona C** tarde

1 hora 30 minutos

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[80 puntos]**.

8823 – 7225

9 páginas

© International Baccalaureate Organization 2023

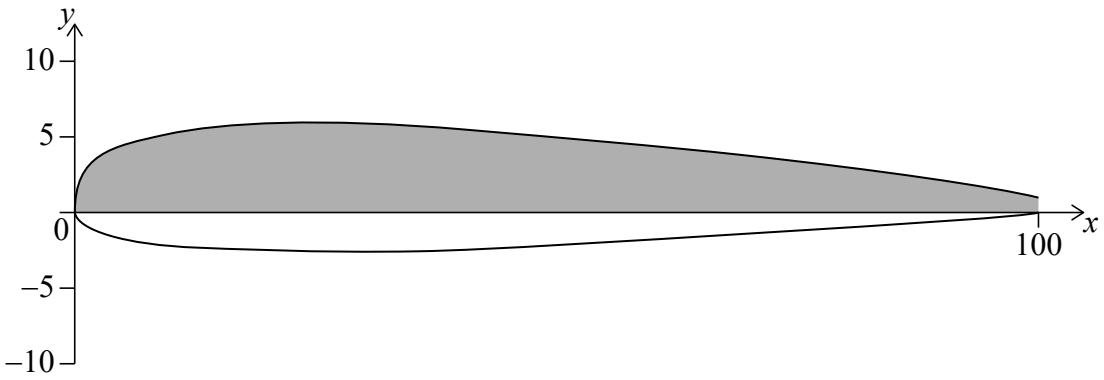
International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

Página en blanco

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 12]

Gabriel está investigando la forma que tienen las alas de un avión de aeromodelismo. A continuación se muestra el corte transversal de una de las alas, representado gráficamente en los ejes de coordenadas.



La parte sombreada del corte transversal es la región delimitada entre el eje x y la curva, y tiene por ecuación

$$y = 2\sqrt{x} - \frac{x}{5} + 1, \text{ para } 0 \le x \le 100$$

donde x es la distancia (en cm) desde la parte delantera del ala e y es la altura (en cm) respecto al eje horizontal a través del ala, tal y como se muestra en la figura.

(a) Halle los valores de a, b y c de la siguiente tabla. [3]

x (cm)	0	25	50	75	100
y (cm)	1	a	b	c	1

Gabriel utiliza la regla del trapecio con cuatro intervalos para estimar el área sombreada del corte transversal del ala.

(b) Halle la estimación de Gabriel del área sombreada del corte transversal. [3]

(c) (i) Escriba la integral que puede utilizar Gabriel para hallar el área exacta de la parte sombreada del corte transversal.

(ii) A partir de lo anterior, utilice la calculadora de pantalla gráfica para hallar el área de la parte sombreada del corte transversal. Dé la respuesta redondeando a una cifra decimal. [4]

(d) Calcule el porcentaje de error cometido en la estimación de Gabriel del apartado (b). [2]

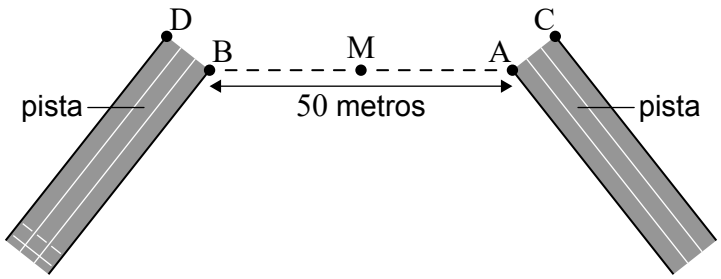
Véase al dorso

2. [Puntuación máxima: 15]

Madhu está diseñando una pista de trotar para el campus de su colegio. La siguiente figura muestra un fragmento incompleto de la pista.

Madhu quiere diseñar la pista de modo tal que el borde interior sea una curva suave que vaya del punto A al punto B y el otro borde sea una curva suave que vaya del punto C al punto D. La distancia que hay entre los puntos A y B es 50 metros.

la figura no está dibujada a escala

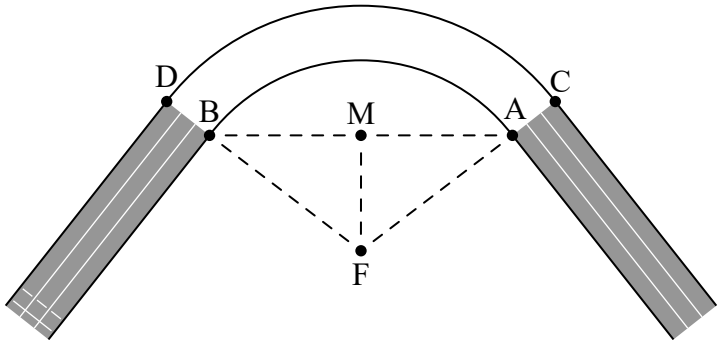


Para crear una curva suave, Madhu camina primero hasta M, que es el punto medio de [AB].

(a) Escriba la longitud de [BM]. [1]

A continuación Madhu camina 20 metros en dirección perpendicular a [AB] para ir desde el punto M hasta el punto F. El punto F es el centro de una circunferencia cuyo arco será la curva suave que une los puntos A y B de la pista, tal y como se muestra en la siguiente figura.

la figura no está dibujada a escala



(b) (i) Halle la longitud de [BF].

(ii) Halle $\hat{BFM}$. [4]

(c) A partir de lo anterior, halle la longitud del arco AB. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 2: continuación)

El borde exterior de la pista, entre C y D, también es un arco de circunferencia con centro en F y la anchura de la pista es igual a 2 metros.

(d) Calcule el área del fragmento curvo de la pista (ABDC). [4]

La base de la pista será de cemento y tendrá 12 cm de profundidad.

(e) Calcule el volumen de cemento que se necesita para hacer el fragmento curvo de la pista. [3]

3. [Puntuación máxima: 18]

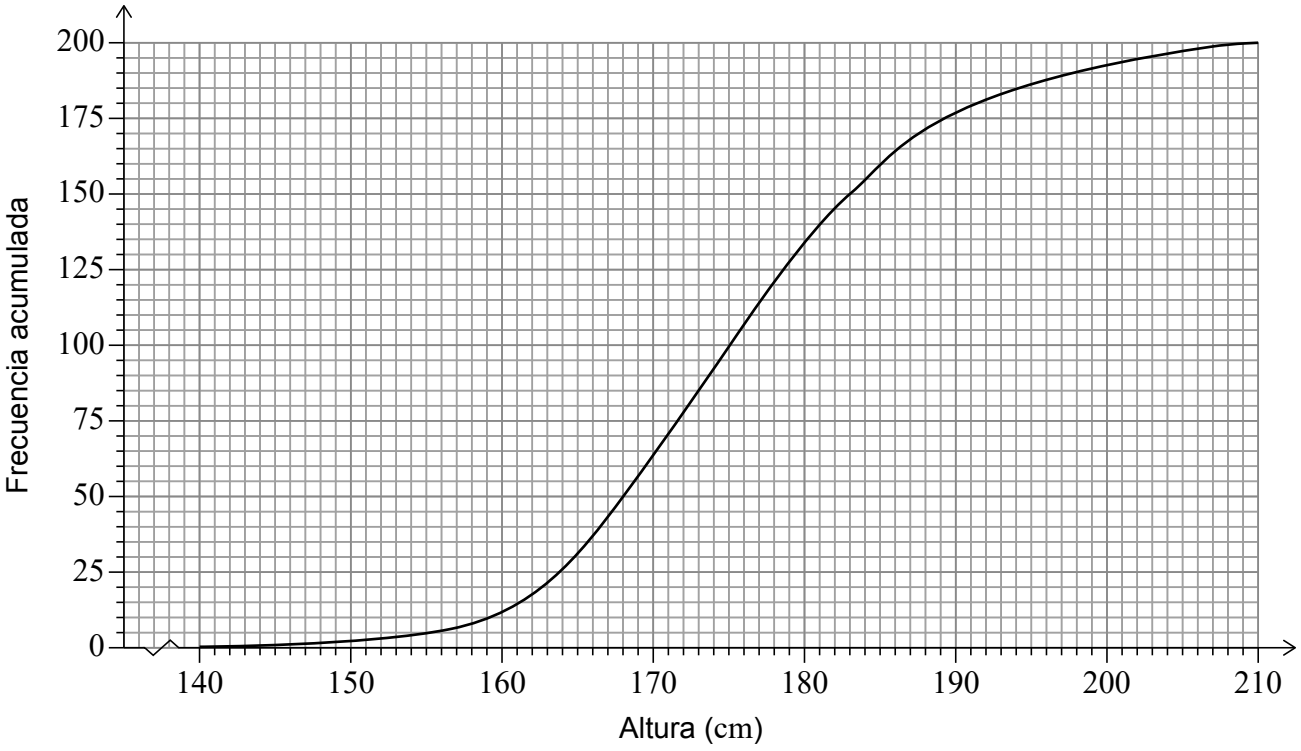
Las alturas (h) de 200 estudiantes universitarios se muestran en la siguiente tabla.

Altura (cm)	**Frecuencia**
$140 \leq h < 160$	11
$160 \leq h < 170$	51
$170 \leq h < 180$	68
$180 \leq h < 190$	47
$190 \leq h < 210$	23

(a) (i) Escriba el valor central del intervalo de $140 \leq h < 160$.

(ii) Calcule una estimación de la media de las alturas de los 200 estudiantes. [3]

Esta tabla se utiliza para crear el siguiente gráfico de frecuencias acumuladas.



(b) Utilice la curva de frecuencias acumuladas para estimar el rango intercuartil. [2]

Laszlo es uno de los estudiantes de ese conjunto de datos y mide $204\,\text{cm}$ de altura.

(c) Utilice la respuesta que halló en el apartado (b) para estimar si la altura de Laszlo es, para estos datos, un valor atípico. Justifique su respuesta. [3]

(Esta pregunta continúa en la página siguiente)

(Pregunta 3: continuación)

Se cree que las alturas de los estudiantes universitarios siguen una distribución normal con una media de $176\,\text{cm}$ y desviación típica igual a $13{,}5\,\text{cm}$.

Se decide realizar para estos datos una prueba χ^2 de determinación de la bondad del ajuste para saber si es plausible que esta muestra de 200 estudiantes se haya obtenido de una distribución subyacente $\text{N}(176\,;\ 13{,}5^2)$.

(d) Escriba para esta prueba la hipótesis nula y la hipótesis alternativa. [2]

Como parte de esta prueba se crea la siguiente tabla.

Altura del estudiante (cm)	**Frecuencia observada**	**Frecuencia esperada**
$h < 160$	11	23,6
$160 \leq h < 170$	51	42,1
$170 \leq h < 180$	68	a
$180 \leq h < 190$	47	46,7
$190 \leq h$	23	b

(e) (i) Halle el valor de a y el valor de b.

(ii) A partir de lo anterior, realice una prueba a un nivel de significación del $5\,\%$ e indique claramente a qué conclusión llega, en el contexto de la pregunta. [8]

4. [Puntuación máxima: 16]

Tiffany quiere comprar una casa que tiene un precio de $285\,000$ dólares estadounidenses (USD). Ella va a un banco para pedir un préstamo y comprar la casa. Para poder optar al préstamo, Tiffany tiene que realizar un pago inicial igual al $15\,\%$ del precio de la casa.

El banco le ofrece un préstamo a 30 años por la cantidad restante, con un tipo de interés nominal del $4\,\%$ anual, compuesto mensualmente. Tiffany pagará el préstamo en cuotas fijas al final de cada mes.

(a) (i) Halle el valor del préstamo que le conceden, una vez realizado el pago de la inicial. Dé una respuesta exacta.

(ii) Calcule la cuota mensual que paga Tiffany por este préstamo, redondeando a dos cifras decimales. [5]

(b) Utilizando la respuesta del apartado (a)(ii), calcule la cantidad total que pagará Tiffany durante la vida útil del préstamo, redondeando al número entero de USD más próximo. **No** incluya en sus cálculos el pago de la inicial realizado. [2]

Tiffany quiere devolver el préstamo en menos tiempo y por ello aumenta la cuota hasta los $1300\,\text{USD}$ al mes.

(c) Halle el número total de cuotas mensuales que tendrá que pagar para devolver todo el préstamo. [2]

Esta estrategia hará que el pago final de Tiffany sea inferior a los $1300\,\text{USD}$.

(d) Determine el importe de la última cuota que pagará Tiffany, redondeando a dos cifras decimales. [4]

(e) A partir de lo anterior, determine la cantidad total que se ahorrará Tiffany (redondeando al número entero de USD más próximo) al haber aumentado las cuotas mensuales. [3]

5. [Puntuación máxima: 19]

Howell Industries es una empresa internacional que vende tazones de café para viajes. Un estudio de mercado predice que el número promedio de tazones que venderán cada mes se puede modelizar mediante la ecuación

$$n = 20\,000 - 1000x$$

donde x representa el precio de venta en euros (EUR) de cada tazón.

Un comerciante sugiere que Howell Industries debería vender los tazones a un precio de $16\,\text{EUR}$ la unidad.

(a) Halle el número promedio de tazones que Howell Industries venderá a este precio, según lo que predice el modelo. [2]

(b) Calcule los ingresos mensuales promedio de Howell Industries —sin tener en cuenta los gastos asociados— para este precio de venta. [2]

(c) A partir de lo anterior, escriba la función $R(x)$ que se puede utilizar para predecir los ingresos mensuales promedio de Howell Industries —sin tener en cuenta los gastos asociados— para cualquier precio de venta x. [1]

Howell Industries tiene unos gastos operativos fijos de $10\,000\,\text{EUR}$ al mes. Además, Howell Industries tiene que pagar a su proveedor $10\,\text{EUR}$ por cada tazón de café.

(d) Calcule la ganancia mensual promedio de Howell Industries si venden cada tazón a un precio de $16\,\text{EUR}$. [3]

(e) Muestre que la ganancia mensual promedio para cualquier precio de venta x se pueden calcular utilizando la función $P(x) = -1000x^2 + 30\,000x - 210\,000$. [2]

(f) (i) Halle $P'(x)$.

(ii) Muestre que el precio de venta que sugirió el comerciante no maximiza la ganancia mensual promedio. [4]

Howell Industries negocia un nuevo acuerdo con su proveedor de tazones. Con el nuevo acuerdo, el proveedor acepta rebajar el precio de cada tazón según el número de tazones que Howell Industries les compre. El precio que cobra el proveedor por cada tazón se puede hallar utilizando la función

$$C(n) = 10 - 0{,}0001n$$

donde n representa el número de tazones que ha vendido Howell Industries.

(g) Halle la función que permite calcular la ganancia mensual promedio de Howell Industries, según ese nuevo acuerdo firmado con el proveedor. [3]

(h) A partir de lo anterior, halle el precio de venta de cada tazón que debería fijar Howell Industries, con este nuevo acuerdo, para maximizar la ganancia mensual promedio. [2]